

Valores e Vectores Próprios

Carlos Luz
Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

Ano Lectivo 2004/2005

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Definição de Valor e Vector Próprios | 2 |
| 2 | Um Exemplo de Aplicação | 8 |
| 3 | Propriedades dos valores e vectores próprios | 11 |
| 4 | Teorema de Cayley-Hamilton | 16 |
| 5 | Exercícios Resolvidos | 17 |
| 6 | Exercícios Propostos | 23 |
| 7 | Soluções dos Exercícios Propostos | 26 |
| | Bibliografia | 27 |

Vimos atrás que, se E é um espaço vectorial de dimensão finita, qualquer endomorfismo $T : E \rightarrow E$ pode ser representado em diferentes bases por matrizes semelhantes. Coloca-se naturalmente o problema de encontrar a base de E que conduz à mais “simples” das representações matriciais. O ideal seria que esta matriz fosse diagonal para podermos obter cada componente do vector imagem $T(\vec{x})$ a partir da correspondente componente do vector objecto \vec{x} . Como veremos, isto acontece em algumas situações mas nem sempre é possível. Nestes últimos casos, há contudo a possibilidade de representar a matriz da transformação linear na forma canónica de Jordan, a qual constitui, *grosso modo*, uma aproximação da forma diagonal.

A resolução das questões mencionadas passa pelas noções de valor e vector próprio que introduziremos seguidamente.

1 Definição de Valor e Vector Próprios

Seja E um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) e $T : E \rightarrow E$ uma transformação linear (endomorfismo de E).

Definição 1.1 Um vector não nulo \vec{x} de E designa-se por **vector próprio** de T se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. O escalar λ diz-se o **valor próprio** de T associado ao vector próprio \vec{x} . Diz-se também que \vec{x} é um vector próprio de T associado ao valor próprio λ .

O conjunto dos valores próprios de T é designado por **espectro** de T .

Exemplo 1.1 (*Significado geométrico de valor e vector próprio*) Voltemos a considerar a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow T(x_1, x_2) = (x_2, x_1).$$

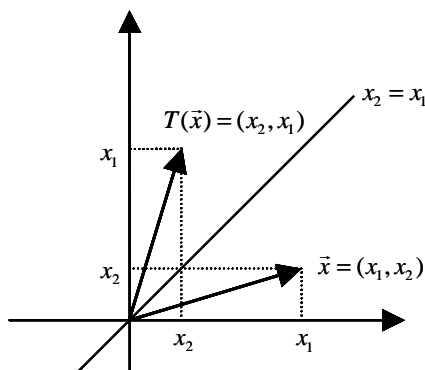


Figura 1: Reflexão.

Geometricamente, já vimos que a transformação T aplica um vector (x_1, x_2) no seu simétrico (x_2, x_1) relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares (observe-se a figura 1), dizendo-se, por isso, uma *reflexão*. Verifica-se facilmente que os vectores com a direcção da referida bissetriz (cuja equação é $x_2 = x_1$) são transformados em si próprios pois,

$$T(x_1, x_1) = (x_1, x_1) = 1(x_1, x_1).$$

Tem-se pois que os vectores da forma (x_1, x_1) (por exemplo, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, etc.) são vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda = 1$ (ver figura 2).

Também os vectores perpendiculares à bissetriz dos quadrantes ímpares (ver figura 2), isto é, os vectores da forma $(-x_1, x_1)$, são vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda = -1$ pois,

$$T(-x_1, x_1) = (x_1, -x_1) = -1(-x_1, x_1).$$

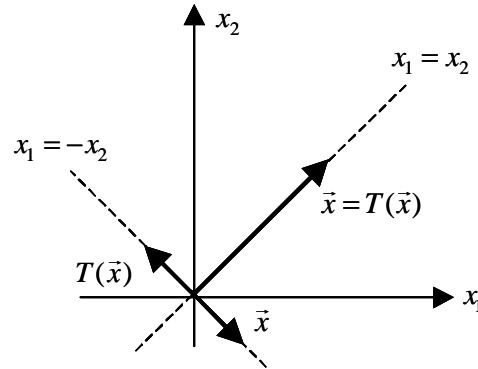


Figura 2: Vectores próprios de $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

Vê-se, assim, que os vectores próprios de T representam direcções (neste caso do plano) que se mantêm invariantes pela acção da transformação T . Mais precisamente, são vectores transformados por T em vectores colineares, verificando-se que os quocientes entre as componentes homólogas das imagens e dos respectivos objectos são iguais ao valor próprio associado. ■

Exemplo 1.2 (*O operador de derivação*) Seja V o espaço vectorial de todas as funções reais diferenciáveis num intervalo aberto de \mathbb{R} . Seja D a transformação linear que a cada função de V faz corresponder a sua derivada, isto é,

$$\begin{aligned} D: V &\rightarrow V \\ f &\rightarrow D(f) = f'. \end{aligned}$$

É costume designar D por *operador de derivação*. Facilmente se vê que D é uma transformação linear pois, para quaisquer funções $f, g \in V$,

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$$

e, sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in V$,

$$D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f'.$$

Os vectores próprios de D são as funções f não nulas de V que satisfazem a equação

$$D(f) = \lambda f,$$

ou seja,

$$f' = \lambda f,$$

para um certo escalar real λ . Esta é uma equação linear de primeira ordem cujas soluções são dadas pela fórmula

$$f(x) = ce^{\lambda x},$$

em que c é uma constante arbitrária. Assim, os vectores próprios de D são todas as funções exponenciais $f(x) = ce^{\lambda x}$ com $c \neq 0$. O escalar λ é o valor próprio associado ao vector próprio $f(x) = ce^{\lambda x}$. De notar que a transformação D tem uma infinidade de valores próprios e que associado a cada um destes existe uma infinidade de vectores próprios (basta fazer variar o parâmetro c) ■

Exercício 1.1 Indique, a partir da interpretação geométrica, quais os valores e vectores próprios da transformação $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $P(x, y, z) = (x, y, 0)$. ■

Quando E é um espaço vectorial de dimensão finita, a transformação linear $T : E \rightarrow E$ pode ser representada por uma matriz A relativamente a uma base fixada em E . Então, pela definição 1.1, um vector próprio de T é um vector \vec{x} não nulo tal que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, visto que esta igualdade equivale a $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Sendo X a representação matricial de \vec{x} , como

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = O \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = O,$$

onde I é a matriz identidade e O uma matriz coluna nula, concluímos que \vec{x} é vector próprio de T associado ao valor próprio λ se e só se X é uma solução não nula do sistema homogéneo $(A - \lambda I)X = O$. Mas este sistema possui soluções não nulas se e só se $\det(A - \lambda I) = 0$, pelo que fica provado o seguinte:

Proposição 1.1 *Seja E um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{K} e T um endomorfismo de E representado pela matriz A em relação a uma base de E . Então, um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de T se e só se é uma solução da equação $\det(A - \lambda I) = 0$.*

A proposição anterior sugere o estudo do determinante $\det(A - \lambda I)$ em função de λ . Admitiremos em tudo o que se segue que os elementos das matrizes intervenientes pertencem a um corpo \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Proposição 1.2 *Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de ordem n e I a matriz identidade de ordem n , a função p definida por*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

é um polinómio em λ de grau n , designado por **polinómio característico** de A . O coeficiente do termo de grau n do polinómio p é $(-1)^n$ e o termo constante é $p(0) = \det(A)$.

Demonstração. Recorde-se (ver [4, pág. 182]) que o determinante de $A - \lambda I$ pode calcular-se multiplicando cada termo da matriz¹ por $+1$ ou -1 e somando em seguida os resultados obtidos. Cada termo é o produto de elementos da matriz em que cada linha ou coluna se encontra representada uma e uma só vez. Como os elementos da matriz $A - \lambda I$ são constantes ou da forma $a_{ii} - \lambda$, conclui-se que cada termo de $A - \lambda I$ é um polinómio de grau $\leq n$. Visto que o termo da matriz resultante do produto dos elementos da diagonal principal,

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda), \tag{1}$$

é um polinómio de grau n , fica provado que p é um polinómio em λ de grau n .

Do que se disse resulta imediatamente que o coeficiente de λ^n em p é o coeficiente de λ^n em (1), ou seja, $(-1)^n$. Por fim, fazendo $\lambda = 0$ em $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, obtém-se $p(0) = \det A$. ■

Sendo E um espaço vectorial de dimensão finita em que se fixou uma base, os valores e os vectores próprios de um endomorfismo de E são também designados por valores e vectores próprios da matriz que o representa. Tem-se pois:

¹Não confundir com a noção de termo de um polinómio.

Definição 1.2 Se A é uma matriz quadrada, os valores próprios de A são as raízes da equação

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0,$$

designada por **equação característica** de A . Os vectores próprios de A associados ao valor próprio λ são as soluções do sistema

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = O,$$

A **multiplicidade algébrica** de um valor próprio λ é a multiplicidade do escalar λ enquanto raiz da equação característica².

O **espectro** de A é o conjunto dos seus valores próprios.

Antes da apresentação de alguns exemplos, vamos sistematizar o procedimento a seguir no cálculo dos valores e vectores próprios de uma matriz A quadrada:

1. Calcular o polinómio característico de A , isto é, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
2. Resolver a equação $p(\lambda) = 0$ para obter as raízes λ da equação característica (estas raízes são os valores próprios de A).
3. Para cada valor próprio λ obtido no ponto anterior, resolver o sistema homogéneo $(A - \lambda I)X = O$ (as soluções não nulas deste sistema são os vectores próprios associados ao valor próprio λ).

Exemplo 1.3 Consideremos a transformação linear reflexão $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ dada no exemplo 1.1. Supondo fixada a base canónica em \mathbb{R}^2 , para calcular os vectores e valores próprios é necessário conhecer a matriz A que representa T . Como $T(1, 0) = (0, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$ tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1,$$

donde A tem dois valores próprios distintos $+1$ e -1 , tendo cada um deles multiplicidade algébrica 1.

Vejamos como calcular os vectores próprios. Para isso, vamos resolver, para cada valor de λ , o sistema homogéneo

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

- Se $\lambda = 1$ tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = x_1,$$

donde os vectores próprios associados são os vectores não nulos da forma $(x_1, x_1) = x_1(1, 1)$. O conjunto destes vectores reunido com o vector nulo representa-se por $E[1]$. Assim, $E[1] = \langle (1, 1) \rangle$, pelo que $E[1]$ é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^2 , designado habitualmente por subespaço próprio associado ao valor próprio 1;

²Do Teorema Fundamental da Álgebra resulta que um polinómio característico p de grau n tem exactamente n zeros, podendo alguns deles ser iguais. Assim, se p tem m zeros distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ($m \leq n$), então pode factorizar-se na forma

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$$

em que $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. Os expoentes n_1, n_2, \dots, n_m são as multiplicidades algébricas dos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, respectivamente. Para $i = 1, \dots, m$, n_i é pois o número de zeros iguais a λ_i .

- Se $\lambda = -1$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = -x_1,$$

donde os vectores próprios associados são os vectores não nulos da forma $(x_1, -x_1) = x_1(1, -1)$. Então $E[-1] = \langle (1, -1) \rangle$. ■

Proposição 1.3 *Seja E um espaço vectorial de dimensão finita e $T : E \rightarrow E$ uma transformação linear representada pela matriz A em relação a uma base de E . Para cada valor próprio λ de T , o conjunto*

$$E[\lambda] = \{\vec{x} \in E : T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in E : (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\}$$

é um subespaço vectorial de E .

Demonstração. Da segunda igualdade conclui-se que $E[\lambda]$ é precisamente o espaço nulo da matriz $A - \lambda I$, pelo que constitui um subespaço de E . ■

Definição 1.3 *Nas condições da proposição anterior, o subespaço $E[\lambda]$ designa-se por **subespaço próprio** (ou subespaço **característico**) de T (ou de A) associado ao valor próprio λ . A sua dimensão denomina-se por **multiplicidade geométrica** de λ .*

Os subespaços próprios associados a valores próprios de uma transformação $T : E \rightarrow E$ são exemplos de subespaços invariantes de T . Um subespaço F de E diz-se **invariante** de T se e só se $T(F) \subseteq F$. Deste modo, como para qualquer $\vec{x} \in E[\lambda]$, $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \in E[\lambda]$, podemos concluir que $T(E[\lambda]) \subseteq E[\lambda]$, ou seja, $E[\lambda]$ é invariante de T .

Também, como é fácil de verificar, sendo λ_1 e λ_2 valores próprios de T , a soma $E[\lambda_1] + E[\lambda_2]$ é um subespaço invariante da transformação T .

Ainda outro exemplo: no espaço P_n dos polinómios de grau menor ou igual a n , os subespaços P_k ($k \leq n$) são invariantes em relação ao operador de derivação. Com efeito, seja $p \in D(P_k)$. Como $D(P_k) \subseteq P_k$, tem-se $p \in P_k$ e, portanto, $D(P_k) \subseteq P_k$.

Voltando ao exemplo 1.3, vemos que as multiplicidades geométricas de $E[-1]$ e $E[1]$ são ambas iguais a 1 e, portanto, coincidem com as multiplicidades algébricas dos respectivos valores próprios. Mas nem sempre assim acontece como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo 1.4 Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 (1 + \lambda) (1 - \lambda), \end{aligned}$$

pelo que a matriz tem os valores próprios 2, -1 e 1, o primeiro com multiplicidade algébrica 2 e os restantes com multiplicidade algébrica 1.

Para calcular os vectores próprios, vamos resolver, para cada valor de λ , o sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

- Se $\lambda = 2$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -3x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

donde $E[2] = \langle(0, 1, 0, 0)\rangle$. Consequentemente, visto que $\dim E[2] = 1$, a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = 2$ é igual a 1, inferior portanto à sua multiplicidade algébrica, que é 2.

- Se $\lambda = -1$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

donde $E[-1] = \langle(0, 0, 1, 0)\rangle$ e as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem.

- Se $\lambda = 1$, tem-se $E[1] = \langle(0, 0, 0, 1)\rangle$ e, portanto, também aqui as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem. ■

Este exemplo deixa perceber que a multiplicidade geométrica de um valor próprio é menor ou igual à respectiva multiplicidade algébrica. Provaremos adiante na proposição 3.7 que sempre assim acontece.

Vejamos agora o caso de uma matriz com valores próprios complexos.

Exemplo 1.5 Consideremos o espaço vectorial complexo \mathbb{C}^3 . Seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ a transformação linear cuja matriz representativa na base canónica de \mathbb{C}^3 é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1) = (1 - \lambda)(\lambda - i)(\lambda + i)$$

pelo que os valores próprios de T (ou de A) são

$$\lambda = 1 \vee \lambda = i \vee \lambda = -i.$$

Para obter os vectores próprios associados, vamos resolver, para cada valor de λ , o sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

- Se $\lambda = 1$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

donde $E[1] = \langle(1, 0, 0)\rangle$. Consequentemente, visto que $\dim E[1] = 1$, as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem.

- Se $\lambda = i$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)x_1 = 0 \\ -ix_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - ix_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = ix_3 \end{cases}$$

donde $E[i] = \langle(0, i, 1)\rangle$. Consequentemente, visto que $\dim E[1] = 1$, também neste caso as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem.

- Se $\lambda = -i$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+i)x_1 = 0 \\ ix_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + ix_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -ix_3 \end{cases}$$

donde $E[-i] = \langle(0, -i, 1)\rangle$. Tal como anteriormente, as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem, pois $\dim E[-i] = 1$. Note-se que se podem obter os vectores de $E[-i]$ passando as componentes dos vectores de $E[i]$ ao conjugado. Este procedimento pode ser sempre utilizado desde que A seja uma matriz de elementos reais. De facto, conjugando ambos os membros da igualdade $AX = \lambda X$ obtém-se $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$, onde \bar{X} é a matriz coluna cujas componentes são os conjugados das componentes de X .

Como T é um endomorfismo do espaço vectorial complexo \mathbb{C}^3 , os valores próprios de A e de T coincidem, dado que as raízes da equação característica pertencem a \mathbb{C} . Se, por outro lado, considerássemos T um endomorfismo do espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , representado matricialmente por A , então as raízes $+i$ e $-i$ da equação característica não seriam valores próprios de T , visto que não pertencem ao corpo dos números reais. Neste caso T teria unicamente o valor próprio $\lambda = 1$, ou seja, somente a raiz da equação característica pertencente ao corpo de escalares de \mathbb{R}^3 seria valor próprio do endomorfismo T . ■

2 Um Exemplo de Aplicação

As aplicações dos valores e vectores próprios são extremamente numerosas. Seguidamente, veremos um exemplo de aplicação à resolução de um sistema de equações diferenciais.

Exemplo 2.1 Consideremos o sistema homogéneo de duas equações diferenciais,

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) \end{cases},$$

em que y_1 e y_2 representam duas funções incógnitas de uma variável real t , definidas num intervalo $V \subseteq \mathbb{R}$. Matricialmente este sistema pode escrever-se na forma

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Para determinar as funções incógnitas y_1 e y_2 , vamos proceder por analogia com o caso univariado. Como recordámos no exemplo 1.2, as soluções da equação diferencial $y'(t) = \lambda y(t)$, em que λ é um escalar real, podem escrever-se na forma $y(t) = x e^{\lambda t}$, em que x é uma constante arbitrária dependente das condições iniciais (por exemplo, se $y(0) = 1$ ter-se-á $x = 1$). Por analogia, suponhamos que o vector

$$\vec{y}(t) = \vec{x}e^{\lambda t} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

onde $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é um vector de constantes, é uma solução do sistema dado (2). Então, derivando $\vec{y}(t)$ componente a componente, obtém-se

$$\vec{y}'(t) = \lambda \vec{x}e^{\lambda t} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \lambda e^{\lambda t}.$$

Substituindo $\vec{y}'(t)$ em (2) vem

$$\lambda \vec{x}e^{\lambda t} = A\vec{x}e^{\lambda t},$$

pelo que dividindo ambos os membros desta igualdade por $e^{\lambda t}$, somos conduzidos a

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}.$$

Assim, para que a função vectorial $\vec{y}(t) = \vec{x}e^{\lambda t}$ seja solução do sistema dado (2) é necessário que \vec{x} seja um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio λ .

Determinemos os valores e vectores próprios de A . Ora

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 2 \\ 2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -2.$$

Para os vectores próprios temos os seguintes cálculos:

- Se $\lambda = 2$,

$$\begin{bmatrix} 0 - 2 & 2 \\ 2 & 0 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

pelo que $E[2] = \langle (1, 1) \rangle$.

- Se $\lambda = -2$,

$$\begin{bmatrix} 0 - (-2) & 2 \\ 2 & 0 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2,$$

pelo que $E[-2] = \langle (-1, 1) \rangle$.

Então, tomando os vectores próprios $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (associado a $\lambda = 2$) e $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (associado a $\lambda = -2$), temos que os vectores

$$\vec{y}_1(t) = \vec{x}_1 e^{2t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \quad \text{e} \quad \vec{y}_2(t) = \vec{x}_2 e^{-2t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

são soluções do sistema (2). Mais: como veremos, os vectores \vec{y}_1 e \vec{y}_2 são suficientes para gerar todas as suas soluções do sistema, visto que qualquer solução \vec{y} de (2) é uma combinação linear de \vec{y}_1 e \vec{y}_2 , isto é,

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Consequentemente, as funções incógnitas y_1 e y_2 são dadas por

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} \\ y_2(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \end{cases} \quad (3)$$

Vejam como visualizar graficamente a solução do sistema.

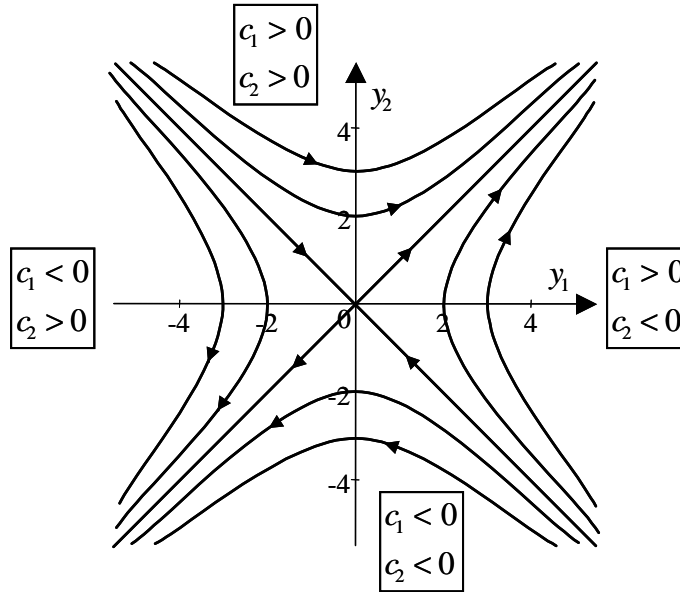


Figura 3: Esboço do retrato de fase do sistema (2).

Para cada escolha das constantes c_1 e c_2 , obtemos no plano $y_1 y_2$ uma curva designada por **órbita** do sistema. O conjunto de todas as órbitas designa-se por **retrato de fase** do sistema e o plano $y_1 y_2$ que contém todas as órbitas recebe a designação de **espaço de fases** do sistema.

Assim, por exemplo, se $c_2 = 0$, tem-se que $y_1(t) = y_2(t) = c_1 e^{2t}$, pelo que a órbita correspondente a $c_2 = 0$ e $c_1 > 0$ é a parte da bissetriz $y_2 = y_1$ situada no 1º quadrante do plano $y_1 y_2$, como mostra a figura 3 (a seta indica a direcção de crescimento da variável t). Caso $c_2 = 0$ e $c_1 < 0$ obtemos a parte da recta $y_2 = y_1$ situada no 3º quadrante. Em qualquer das situações vemos que $\|\vec{y}(t)\| \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Por outro lado, se $c_1 = 0$, tem-se que $y_1(t) = -y_2(t)$, qualquer que seja c_2 não nulo. Para qualquer par de valores c_1 e c_2 nestas condições, a órbita correspondente é a bissetriz dos quadrantes pares $y_2 = -y_1$. Tem-se neste caso que $\|\vec{y}(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, como sugerem as setas colocadas sobre aquela bissetriz na figura 3.

Quando $c_1 c_2 \neq 0$, obtêm-se quatro tipos de órbitas conforme se apresenta na mesma figura. Por exemplo, para $c_1 > 0$ e $c_2 < 0$ obtêm-se soluções representadas por curvas que atravessam o 1º e o 2º quadrantes do plano $y_1 y_2$, as quais têm por assintotas as rectas $y_2 = y_1$ e $y_2 = -y_1$. Como se vê, para qualquer combinação de c_1 e c_2 nestas condições, tem-se também que $\|\vec{y}(t)\| \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.

É evidente que não é possível apresentar o retrato de fase de um sistema na sua totalidade, já que seria necessário representar uma infinidade de curvas cobrindo todo o plano. Assim, é costume representar-se um conjunto de órbitas típicas, formando-se um esboço do retrato de fase. No caso do sistema (2), o esboço do retrato de fase é apresentado na fig. 3. Ele configura uma situação típica de **ponto de sela** (na origem), a qual ocorre num sistema em que, tal como acontece no sistema (2), os valores próprios da matriz dos coeficientes são reais e de sinais contrários.

Suponhamos, para finalizar, que pretendemos resolver o problema de valores iniciais associado ao sistema (2) com $y_1(0) = 3$ e $y_2(0) = 0$. Calculando em (3) $y_1(0)$ e $y_2(0)$ e igualando a 3 e a 0, respectivamente, obtêm-se

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3/2 \\ c_2 = -3/2 \end{cases} .$$

A solução procurada é então

$$\begin{cases} y_1 = \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \\ y_2 = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{-2t} \end{cases} .$$

e é representada pela curva que se encontra mais à direita na figura 3.

3 Propriedades dos valores e vectores próprios

Vejamos agora algumas propriedades dos valores e vectores próprios.

Proposição 3.1 *Os valores próprios de uma matriz triangular são os elementos da diagonal principal.*

Demonstração. Exercício. ■

Proposição 3.2 *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os seus valores próprios. Então:*

- (a) $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- (b) $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, onde $\operatorname{tr} A$ representa o **traço** da matriz A , isto é, é a soma dos elementos da diagonal principal de A .

Demonstração. Consideremos o polinómio característico da matriz A :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0.$$

Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ as raízes de $p(\lambda)$, repetidas tantas vezes quanto a sua ordem de multiplicidade, o polinómio pode escrever-se na forma

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Comparando estas duas formas de $p(\lambda)$ conclui-se que o termo independente c_0 e o coeficiente do termo de ordem $n - 1$ são dados por

$$\begin{aligned} c_0 &= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \\ c_{n-1} &= (-1)^n (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n). \end{aligned}$$

Como $p(0) = \det A = c_0$, conclui-se $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, o que prova (a).

Para provar (b) teremos de identificar os termos de $\det(A - \lambda I)$ que contribuem para o termo de grau $n - 1$ em $p(\lambda)$. Recordando a fórmula de cálculo do determinante à custa dos termos da matriz (ver Teorema 5.2 em [4, pág. 182]), somente o termo par $(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ daquele determinante pode contribuir para a parcela $c_{n-1} \lambda^{n-1}$ de $p(\lambda)$. Isto porque, em cada um destes termos, têm de estar presentes pelo menos $n - 1$ factores pertencentes à diagonal principal de $A - \lambda I$; o restante factor tem que representar uma linha e uma coluna diferente da dos anteriores, pelo que não pode deixar de pertencer também à diagonal principal de $A - \lambda I$. Como o coeficiente de λ^{n-1} em $(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ é $(-1)^n (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$, concluímos que $c_{n-1} = (-1)^n \operatorname{tr} A$ e, portanto, a igualdade (b). ■

Exercício 3.1 Demonstre as seguintes propriedades do traço de uma matriz:

- (a) $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$;
- (b) $\text{tr}(cA) = c \text{tr} A$ (c escalar);
- (c) $\text{tr} A^T = \text{tr} A$;
- (d) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Proposição 3.3 Duas matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico.

Demonstração. Se A e B são matrizes quadradas semelhantes, existe uma matriz P , invertível, tal que $B = P^{-1}AP$. Logo,

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\ &= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = (\det P^{-1}) [\det(A - \lambda I)] (\det P) \\ &= \det(A - \lambda I), \end{aligned}$$

isto é, os polinómios característicos de A e B coincidem. ■

Proposição 3.4 Se uma matriz A tem k valores próprios distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, então os vectores próprios correspondentes, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$, são linearmente independentes.

Demonstração. A demonstração é por indução em k . Se $k = 1$, então \vec{x}_1 é linearmente independente pois \vec{x}_1 é não nulo. Admita-se que o enunciado é verdadeiro para os primeiros $k - 1$ valores próprios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ e provemos que também o é para k valores próprios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Ora os correspondentes vectores próprios $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$, são linearmente independentes se qualquer combinação linear nula

$$\mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 + \dots + \mu_k \vec{x}_k = \vec{0}_E \quad (4)$$

tiver os escalares μ_i todos nulos.

Multiplicando à esquerda (4) por A obtemos

$$\mu_1 A\vec{x}_1 + \mu_2 A\vec{x}_2 + \dots + \mu_k A\vec{x}_k = \vec{0}_E$$

donde, atendendo a que os \vec{x}_i são vectores próprios associados aos λ_i , vem

$$\mu_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \mu_k \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}_E. \quad (5)$$

Multiplicando agora (4) por λ_k obtemos

$$\mu_1 \lambda_k \vec{x}_1 + \mu_2 \lambda_k \vec{x}_2 + \dots + \mu_k \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}_E, \quad (6)$$

e, subtraindo (6) de (5), chegamos a

$$\mu_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \vec{x}_1 + \mu_2 (\lambda_2 - \lambda_k) \vec{x}_2 + \dots + \mu_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \vec{x}_{k-1} = \vec{0}_E.$$

Pela hipótese de indução os $k - 1$ vectores próprios $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k-1}$ são linearmente independentes, donde $\mu_i (\lambda_i - \lambda_k) = 0$, para $i = 1, \dots, k - 1$. Como os λ_i são distintos, tem-se $\lambda_i \neq \lambda_k$, para $i = 1, \dots, k - 1$, donde $\mu_i = 0$, para estes valores de i . Substituindo estes μ_i em (4) vem $\mu_1 \vec{x}_1 = \vec{0}_E$ e portanto $\mu_1 = 0$. Portanto, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$, o que prova a independência linear de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$. ■

Suponhamos agora que A tem n valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, correspondentes aos vectores próprios $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Consideremos a matriz

$$P = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix},$$

em que X_i é a matriz coluna que representa matricialmente \vec{x}_i , $i = 1, \dots, n$. Então, as equações

$$\begin{cases} A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1 \\ A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2 \\ \vdots \\ A\vec{x}_n = \lambda_n\vec{x}_n \end{cases}$$

podem escrever-se matricialmente na forma

$$AP = PD \tag{7}$$

em que

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal, na qual os valores próprios λ_i aparecem dispostos na diagonal principal pela ordem em que os vectores próprios \vec{x}_i aparecem colocados nas colunas de P .

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ forem todos distintos, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, são linearmente independentes e consequentemente P é invertível. Logo (7) implica que

$$P^{-1}AP = D,$$

isto é, A e D são semelhantes. A matriz A diz-se então **diagonalizável** e P diz-se uma matriz **diagonalizante**. Quando A e D representam o mesmo endoformismo em diferentes bases, este também se diz diagonalizável visto que pode ser representado numa certa base pela matriz diagonal D . Neste contexto, a matriz P é a matriz de mudança de base.

Fica assim demonstrado que:

Proposição 3.5 *Se A é uma matriz de ordem n e tem n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.*

Exemplo 3.1 Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &-2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 - \lambda & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &(1 - \lambda) [(1 - \lambda)^2 - 8] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 1 + 2\sqrt{2} \vee \lambda = 1 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Como A tem três valores próprios distintos, a proposição anterior garante que A é diagonalizável. Calculemos os vectores próprios:

- Se $\lambda = 1$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 = 0 \\ -2x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases},$$

donde $E[1] = \langle (0, 1, 1) \rangle$.

- Se $\lambda = 1 + 2\sqrt{2}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 2 & -2 \\ 2 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2}x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2\sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

donde $E[1 + 2\sqrt{2}] = \langle (-\sqrt{2}, -1, 1) \rangle$.

- Se $\lambda = 1 - 2\sqrt{2}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2 & -2 \\ 2 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2\sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

donde $E[1 - 2\sqrt{2}] = \langle (\sqrt{2}, -1, 1) \rangle$.

Finalmente, sendo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz diagonalizante e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

a matriz diagonal que tem na diagonal principal os valores próprios de A , verifica-se que $P^{-1}AP = D$. ■

São relativamente poucas as matrizes que têm todos os valores próprios distintos. Contudo, sendo A uma matriz com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, correspondentes aos vectores próprios $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, pode sempre escrever-se a igualdade $AP = PD$ dada em (7). Assim, sempre que P seja invertível, A é diagonalizável, pois ter-se-á $P^{-1}AP = D$. Pode-se pois enunciar:

Proposição 3.6 *Seja A uma matriz de ordem n . Então A é diagonalizável se e só se é possível encontrar n vectores próprios linearmente independentes.*

Nestas condições, tem-se que

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1},$$

onde D é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os valores próprios de A e P é a matriz invertível formada pela disposição em coluna dos correspondentes vectores próprios linearmente independentes.

Demonstração. A condição necessária e suficiente resulta das considerações prévias feitas ao enunciado da proposição.

A igualdade $A = PDP^{-1}$ resulta de $P^{-1}AP = D$, multiplicando ambos os membros desta última, à esquerda e à direita, por P e P^{-1} , respectivamente. ■

Na linguagem das transformações lineares, o resultado anterior pode ser enunciado como segue: *um endomorfismo T de um espaço vectorial E de dimensão finita é diagonalizável se e só se existe uma base de E formada por vectores próprios de T .*

Exemplo 3.2 Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \\ -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = 0 &\Leftrightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda-7) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (mult. alg. 2)} \vee \lambda = 7. \end{aligned}$$

Vê-se assim que A tem dois valores próprios distintos 1 e 7, o primeiro com multiplicidade algébrica 2.

- Se $\lambda = 1$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

donde $E[1] = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$, constituindo estes vectores uma base do subespaço próprio. Neste caso as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem.

- Se $\lambda = 7$ tem-se

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = \frac{3}{2}x_2 \end{cases}$$

donde $E[7] = \langle (1, 2, 3) \rangle$.

Como os vectores próprios $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ e $(1, 2, 3)$ são linearmente independentes, a matriz diagonalizante é

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De facto, verifica-se que $A = PDP^{-1}$, onde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

é a matriz diagonal. ■

Apresenta-se seguidamente o exemplo duma matriz não diagonalizável.

Exemplo 3.3 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Esta matriz não é diagonalizável porque:

- A tem valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$ com multiplicidades algébricas 2 e 1, respectivamente.
- $E[1] = \langle (1, 5, 10) \rangle$ e $E[6] = \langle (1, 0, 0) \rangle$, isto é, ambas as multiplicidades geométricas são iguais a 1, donde não é possível obter três vectores próprios linearmente independentes. ■

Como já referimos, as multiplicidades algébrica e geométrica de um valor próprio relacionam-se como segue:

Proposição 3.7 *Seja A uma matriz de ordem n . A multiplicidade geométrica de um valor próprio de A é inferior ou igual à respectiva multiplicidade algébrica.*

Demonstração. Seja λ um valor próprio de A com multiplicidade algébrica k ($k \leq n$). Seja P uma matriz de ordem n , invertível, em cujas primeiras k colunas estão dispostos k vectores próprios de A associados ao valor próprio λ . Então $AP = PB$, em que a matriz B tem a forma

$$B = \begin{bmatrix} \lambda I_k & B_1 \\ O & B_2 \end{bmatrix},$$

sendo I_k a matriz identidade de ordem k e O a matriz nula. Assim, $P^{-1}AP = B$, ou seja, A e B são semelhantes pelo que, de acordo com a proposição 3.3, têm os mesmos valores próprios. Ora, o polinómio característico de B tem a forma $(x - \lambda)^k q(x)$, em que $q(x)$ é um polinómio de grau $n - k$. Consequentemente, k é inferior ou igual à multiplicidade algébrica de λ . ■

O valor próprio $\lambda = 1$ da matriz do exemplo 3.3 tem multiplicidade geométrica 1, inferior à respectiva multiplicidade algébrica, que é 2. Deste modo, não é possível obter dois vectores próprios linearmente independentes associados ao valor próprio $\lambda = 1$, o que inviabiliza a diagonalização da matriz. De facto, a condição necessária e suficiente da proposição 3.6 pode ser enunciada do seguinte modo:

Proposição 3.8 *Uma matriz é diagonalizável se e só se a multiplicidade algébrica de cada valor próprio for igual à sua multiplicidade geométrica.*

Demonstração. Exercício. ■

4 Teorema de Cayley-Hamilton

Destacamos das restantes propriedades um teorema muito importante em diversas aplicações, que estabelece que toda a matriz quadrada satisfaz a sua equação característica.

Teorema 4.1 *Seja A uma matriz de ordem n e*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0$$

o seu polinómio característico. Então A satisfaz a sua equação característica, isto é,

$$p(A) = O \Leftrightarrow (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I = O,$$

onde O designa a matriz nula.

Demonstração. A demonstração baseia-se na seguinte propriedade dos determinantes: $A \operatorname{adj} A = (\det A) I$. Aplicando esta fórmula à matriz $A - \lambda I$ vem

$$(A - \lambda I) \operatorname{adj}(A - \lambda I) = p(\lambda) I. \quad (8)$$

Os elementos da matriz $\operatorname{adj}(A - \lambda I)$ são, a menos do sinal, determinantes de menores de ordem $n - 1$ da matriz A . Logo, cada elemento daquela matriz não é mais do que um polinómio em λ de grau $\leq n - 1$. Podemos então escrever

$$\operatorname{adj}(A - \lambda I) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k$$

onde cada coeficiente B_k é uma matriz de ordem n com elementos escalares. Substituindo em (8) obtém-se,

$$(A - \lambda I) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k = p(\lambda)I$$

ou

$$-\lambda^n B_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (AB_k - B_{k-1}) + AB_0 = (-1)^n \lambda^n I + c_{n-1} \lambda^{n-1} I + \dots + c_1 \lambda I + c_0 I.$$

Igualando os coeficientes homólogos das potências de λ obtém-se as equações

$$\begin{aligned} -B_{n-1} &= (-1)^n I \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= c_{n-1} I \\ &\vdots \\ AB_1 - B_0 &= c_1 I \\ AB_0 &= c_0 I. \end{aligned}$$

Multiplicando estas equações sucessivamente por $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$ e somando em seguida os resultados, o primeiro membro da igualdade resultante é a matriz nula O de ordem n . Obtém-se então

$$O = (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I,$$

ou seja, $p(A) = O$. ■

Vejamos uma aplicação deste teorema ao cálculo da inversa de uma matriz.

Assumindo que a matriz A é invertível multipliquemos a igualdade

$$(-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I = O$$

por A^{-1} . Resulta então

$$(-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \dots + c_1 I + c_0 A^{-1} = O.$$

Recordando que $c_0 = \det(A)$, tem-se $c_0 \neq 0$ pois A é invertível. Dividindo a igualdade anterior por c_0 e isolando A^{-1} obtém-se a seguinte fórmula que pode ser utilizada para obter a matriz inversa de A :

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0} [(-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \dots + c_1 I].$$

Exemplo 4.1 Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, cujo polinómio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$. Então

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{5} [(-1)^2 A - 5I] = -\frac{1}{5} (A - 5I) \\ &= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5 Exercícios Resolvidos

1 Mostre que:

- (a) Se A é uma matriz tal que $A^2 = O$ (matriz nula), então o único valor próprio de A é zero.

- (b) Se duas matrizes A e B têm o mesmo vector próprio \vec{v} , então \vec{v} também é vector próprio de $A + B$ e AB . Quais são, em ambos os casos, os correspondentes valores próprios?

Resolução

(a) Suponhamos que A tem um valor próprio $\lambda \neq 0$ e seja \vec{x} um vector próprio que lhe está associado. Então $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, pelo que multiplicando à esquerda ambos os membros desta igualdade por A vem,

$$A^2\vec{x} = \lambda A\vec{x} \Rightarrow \vec{0} = \lambda A\vec{x} \quad \text{pois } A^2=O$$

Como $\lambda \neq 0$, segue-se que $A\vec{x} = \vec{0}$ e, portanto, $A\vec{x} = 0\vec{x}$. Assim, \vec{x} é um vector próprio associado ao valor próprio nulo. Mas isto é absurdo, pois estamos a supor que \vec{x} está associado ao valor próprio não nulo λ . O absurdo partiu de supormos que A tem um valor próprio não nulo, pelo que o único valor próprio de A é zero.

(b) Sejam respectivamente λ e μ os valores próprios de A e B associados a \vec{v} . Então, $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ e $B\vec{v} = \mu\vec{v}$, pelo que somando as igualdades membro a membro vem

$$(A + B)\vec{v} = (\lambda + \mu)\vec{v}.$$

Assim, \vec{v} é vector próprio de $A + B$, sendo $\lambda + \mu$ o valor próprio que lhe está associado.

Por outro lado, \vec{v} é um vector próprio de AB associado ao valor próprio $\mu\lambda$ pois,

$$AB\vec{v} = A(\mu\vec{v}) = \mu A\vec{v} = (\mu\lambda)\vec{v}.$$

- 2] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, a parâmetro real.

- (a) Diga para que valores de a , a matriz admite o valor próprio zero.
 (b) Para esse valor de a , determine os restantes valores próprios e os correspondentes vectores próprios.

Resolução

(a) A matriz admite o valor próprio zero se e só se $A\vec{x} = 0\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ for um sistema indeterminado, isto é, se $\det A = 0$. Ora

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2a - 2),$$

pelo que a matriz A tem um valor próprio nulo se e só se $-(2a - 2) = 0$, ou seja, $a = 1$.

(b) Para $a = 1$ tem-se

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &- \begin{vmatrix} 2 & 2 - \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\lambda + (1 - \lambda)[(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\lambda + (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2 \text{ (mult. alg. 2)}. \end{aligned}$$

Cálculo dos vectores próprios:

- Para $\lambda = 0$ vem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

donde $E[0] = \langle \{(-1, 1, 0)\} \rangle$ e, portanto, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 0$ é 1.

- Para $\lambda = 2$ vem

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

donde $E[2] = \langle \{(0, 1, 1)\} \rangle$ e, portanto, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é 1.

3 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 1 & 0 & m+1 \end{bmatrix}$.

- Calcule o polinómio característico de A assim como os seus valores próprios.
- Para que valores de m a matriz A é diagonalizável?
- Para os valores obtidos encontre uma matriz diagonal D e uma matriz não singular P tal que $A = PDP^{-1}$.

Resolução

- O polinómio característico é dado por:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & m & 1 \\ -1 & 1 - \lambda & -m \\ 1 & 0 & m + 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(1 - \lambda)(m + 1 - \lambda) - m[(-1)(m + 1 - \lambda) + m] + 1[0 - (1 - \lambda)] \\ &= (1 - \lambda)(1 - \lambda)(m + 1 - \lambda) + m(1 - \lambda) - (1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)[(1 - \lambda)(m + 1 - \lambda) + m - 1] \\ &= (1 - \lambda)[\lambda^2 - (m + 2)\lambda + m]. \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são as raízes da equação

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)[\lambda^2 - (m + 2)\lambda + m] = 0$$

Resolvendo esta equação, obtém-se $\lambda = 1 \vee \lambda = m \vee \lambda = 2$.

- Se $m \notin \{1, 2\}$, a matriz A tem 3 valores próprios distintos a que correspondem 3 vectores próprios linearmente independentes. Consequentemente, de acordo com a proposição 3.5, será diagonalizável. Para analisarmos o caso em que $m \in \{1, 2\}$, vamos obter os vectores próprios de A :

- Se $\lambda = 1$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & m & 1 \\ -1 & 0 & -m \\ 1 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} mx_2 = -x_3 \\ x_1 = -mx_3 \end{cases}$$

pelo que $E[1] = \langle \{(-m^2, -1, m)\} \rangle$.

- Se $\lambda = m$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1-m & m & 1 \\ -1 & 1-m & -m \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

pelo que $E[m] = \langle (-1, -1, 1) \rangle$.

- Se $\lambda = 2$ tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & m & 1 \\ -1 & -1 & -m \\ 1 & 0 & m-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (1-m)x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

e, assim, $E[2] = \langle (1-m, -1, 1) \rangle$.

Vemos pois que, se $m = 1$, $E[m] = E[1]$, pelo que a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é 2, sendo a multiplicidade geométrica igual a 1. Logo, A não é diagonalizável.

Se $m = 2$, tem-se $E[m] = E[2]$, pelo que também neste caso as multiplicidades algébrica e geométrica não coincidem, e, portanto, A não é diagonalizável. Conclui-se então que A é diagonalizável se e só se $m \notin \{1, 2\}$.

(c) Para $m \notin \{1, 2\}$, tem-se

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} -m^2 & -1 & 1-m \\ -1 & -1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que $\det P = -m^2 + 3m - 2$, quantidade que é diferente de zero se $m \notin \{1, 2\}$. Assim P é não singular e verifica-se que $P^{-1}AP = D$.

- 4** Sejam P_2 o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e $\{1, x, 1+x^2\}$ uma base de P_2 . Considere as transformações lineares $T, S : P_2 \rightarrow P_2$ definidas por $T[p(x)] = p'(x)$ e $S[p(x)] = xp'(x)$.

- Quais as matrizes das transformações T e S ?
- As matrizes obtidas em (a) são diagonalizáveis? Em caso afirmativo, indique a matriz diagonalizante e a matriz diagonal obtida.

Resolução

(a) Cálculo da matriz de T : como

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot (1+x^2) = (0, 0, 0) \\ T(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot (1+x^2) = (1, 0, 0) \\ T(1+x^2) &= 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot (1+x^2) = (0, 2, 0) \end{aligned}$$

tem-se

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cálculo da matriz de S : como

$$\begin{aligned} S(1) &= x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot (1+x^2) = (0, 0, 0) \\ S(x) &= x \cdot 1 = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot (1+x^2) = (0, 1, 0) \\ S(1+x^2) &= x \cdot 2x = 2x^2 = -2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot (1+x^2) = (-2, 0, 2) \end{aligned}$$

tem-se

$$A_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Equação característica da matriz A_T :

$$\begin{aligned} |A_T - \lambda I| = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ (mult. alg. 3)} \end{aligned}$$

Cálculo dos vectores próprios: para $\lambda = 0$ tem-se

$$(A_T - \lambda I) \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

donde $E[0] = \langle (1, 0, 0) \rangle$ e, portanto, $\lambda = 0$ tem multiplicidade geométrica 1. Como não é possível obter 3 vectores próprios linearmente independentes, A_T não é diagonalizável.

Equação característica da matriz A_S :

$$\begin{aligned} |A_S - \lambda I| = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \end{aligned}$$

Cálculo dos vectores próprios:

- Para $\lambda = 0$, tem-se

$$(A_S - 0I) \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

donde $E[0] = \langle (1, 0, 0) \rangle$;

- Para $\lambda = 1$, tem-se

$$(A_S - 1I) \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

donde $E[1] = \langle (0, 1, 0) \rangle$;

- Para $\lambda = 2$, tem-se

$$(A_S - 2I) \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

donde $E[2] = \langle (-1, 0, 1) \rangle$.

Conclui-se que é possível obter 3 vectores próprios linearmente independentes, os quais constituem as colunas da matriz diagonalizante:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz diagonal é a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

com os valores próprios 0, 1 e 2 dispostos na diagonal principal. De facto, verifica-se que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e que

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A_S. \end{aligned}$$

5 Seja A uma matriz de ordem n com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, todos distintos, e vectores próprios $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

(a) Mostre que $A^n = PD^nP^{-1}$, onde D é a matriz diagonal com os valores próprios na diagonal principal e P é a matriz cujas colunas são os vectores próprios correspondentes.

(b) Determine A^{20} , sendo i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Resolução

(a) A demonstração faz-se por indução.

Se A tem os valores próprios todos distintos, então A é diagonalizável, isto é, existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. Logo, a condição $A^n = PD^nP^{-1}$ é verdadeira para $n = 1$. Admitindo a sua veracidade para $n - 1$, provemos que é verdadeira para n . Ora,

$$\begin{aligned} A^n &= A^{n-1}A = (PD^{n-1}P^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^{n-1}(P^{-1}P)DP^{-1} = P(D^{n-1}D)P^{-1} = PD^nP^{-1}, \end{aligned}$$

como queríamos. A 2ª igualdade deve-se à hipótese de indução e as 3ª, 4ª e 5ª justificam-se pela propriedade associativa da multiplicação de matrizes e pelas definições de matriz inversa e de potência de uma matriz.

(b-i) Neste caso tem-se $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$. Logo, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

e

$$\begin{aligned} A^{20} &= PD^{20}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3^{20} \\ 1 & 3^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3^{20} + 1 & 3^{20} - 1 \\ 3^{20} - 1 & 3^{20} + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b-ii) Neste caso obtém-se, de forma análoga, $A^{20} = \begin{bmatrix} 31 & 90 & 0 \\ -10 & -29 & 0 \\ -20 & -60 & 1 \end{bmatrix}$.

- 6 Sendo A uma matriz de ordem n , um polinómio matricial em A , $p(A)$, define-se de maneira análoga à do polinómio escalar:

$$p(A) = c_m A^m + c_{m-1} A^{m-1} + \dots + c_1 A + c_0 I,$$

em que c_0, c_1, \dots, c_n são os coeficientes.

Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, cujo polinómio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$, calculemos o polinómio matricial $p(A) = A^4 + 3A^3 + 2A^2 + A + I$.

Resolução

Pelo teorema de Cayley-Hamilton, a matriz A satisfaz a sua equação característica, isto é,

$$A^2 - 5A + 5I = O.$$

Então,

$$A^2 = 5A - 5I,$$

pelo que

$$\begin{aligned} A^4 &= A^2 A^2 = (5A - 5I)^2 = 25A^2 - 50A + 25I \\ &= 25(5A - 5I) - 50A + 25I = 75A - 100I \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^3 &= A A^2 = A(5A - 5I) = 5A^2 - 5A \\ &= 5(5A - 5I) - 5A = 20A - 25I. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} p(A) &= A^4 + 3A^3 + 2A^2 + A + I = (75A - 100I) + (60A - 75I) + 2(5A - 5I) + A + I \\ &= 146A - 184I \end{aligned}$$

6 Exercícios Propostos

- 1 Determine os valores e vectores próprios das matrizes dadas a seguir. Indique, em cada caso, uma base do subespaço próprio associado a cada valor próprio bem como as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ E &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 2 Diga quais das matrizes do exercício 1 são diagonalizáveis. Para estas, indique a matriz diagonalizante e a matriz diagonal obtida.

- 3] Sejam T e S endomorfismos de um espaço vectorial real E de dimensão 3 cujas matrizes a respeito de uma certa base são, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores e vectores próprios de T , S e de $S \circ T$.

- 4] Suponha que a matriz D do exercício 1 representa uma transformação linear T relativamente à base canónica de \mathbb{R}^3 . Considerando a base $\{\vec{u}_1 = (1, 1, 1), \vec{u}_2 = (1, 1, 0), \vec{u}_3 = (1, 0, 0)\}$ qual é a matriz representativa de T ? Que relação existe entre os valores próprios desta matriz e os da matriz D ? Qual a matriz de mudança de base?

- 5] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ m & m+1 \end{bmatrix}$ onde m é um número real.

- (a) Calcule o polinómio característico de A assim como os seus valores próprios.
 (b) Para que valores de m , a matriz A é diagonalizável?

- 6] Sendo A uma matriz de ordem n , prove que:

- (a) Se λ é valor próprio de A , então λ^k é valor próprio de A^k ($k \in \mathbb{N}$).
 (b) Se $\det A \neq 0$ e λ é valor próprio de A , então λ^{-1} é valor próprio de A^{-1} .
 (c) As matrizes A e A^T têm os mesmos valores próprios.
 (d) Sendo B outra matriz de ordem n , os produtos AB e BA têm os mesmos valores próprios.
 (e) A é invertível se e só se $\lambda = 0$ não é valor próprio de A .
 (f) Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$, zero é o único valor próprio de A .

- 7] Seja A uma matriz de ordem n idempotente. Que relação existe entre os valores e vectores próprios de A e A^2 ?

- 8] Seja A uma matriz de ordem 3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.
 (b) Indique o polinómio característico da matriz A .
 (c) Indique, se existir, uma matriz diagonal semelhante a A .
 (d) Determine, explicitamente, uma matriz A nas condições do enunciado.

- 9] Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine a, b, c e os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A de modo que $\vec{x}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{x}_2 = (-1, 1, 0)$ e $\vec{x}_3 = (-1, -1, 1)$ sejam vectores próprios associados a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.

- 10] Considere o endomorfismo de \mathbb{R}^2 definido por $f(x, y) = (x, x + ay)$, em que $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Para que valores de a a matriz representativa de f é diagonalizável?

- (b) Sendo A a matriz representativa de f na base canónica, para os valores obtidos na alínea (a) encontre uma matriz diagonal D e uma matriz não singular P tal que $A = PDP^{-1}$.

11 Considere a transformação linear $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ que, em relação à base canónica de \mathbb{C}^3 , tem representação matricial

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule os valores próprios e os vectores próprios de T e indique, justificando, se existe uma base de \mathbb{C}^3 em relação à qual a representação matricial de T é diagonal. Em caso afirmativo, obtenha a referida base, a correspondente matriz diagonal D e a matriz diagonalizante P tal que $D = P^{-1}AP$.
- (b) Resolva a alínea (a) para o caso em que T é igualmente definida por A , mas substituindo \mathbb{C}^3 por \mathbb{R}^3 .
- (c) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = I$ e determine o menor valor de n com esta propriedade.

12 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Calcule o polinómio característico assim como os valores e vectores próprios de A .
- (b) Prove que A é diagonalizável e determine uma matriz não singular P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.
- (c) Mostre que A é não singular e utilize a alínea anterior para calcular A^{-1} .
- (d) Prove que $(A^2 - 16I)(A + 2I)$ é a matriz nula, onde I é a matriz identidade de ordem 3. Aproveite este resultado para obter A^{-1} .

13 Seja T um endomorfismo de \mathbb{R}^3 tal que o subespaço gerado pelo vector $(1, 1, 1)$ é invariante para T , assim como o subespaço

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Sabendo que $T(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$, determine a forma da matriz que representa T na base canónica de \mathbb{R}^3 .

14 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 6\frac{1}{2} & -2\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} & 6\frac{1}{2} & -2\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, determine uma matriz B tal que $B^2 = A$.

15 Sejam F_1, F_2, \dots, F_k subespaços de um espaço vectorial E . Diz-se que o subespaço $S = F_1 + F_2 + \dots + F_k$ é uma soma directa e representa-se por $S = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k$ quando, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ se tem $F_i \cap \left(\sum_{j=1, j \neq i}^k F_j \right) = \{\vec{0}\}$.

- (a) Mostre que $S = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k$ se e só se para quaisquer vectores $\vec{f}_1 \in F_1, \vec{f}_2 \in F_2, \dots, \vec{f}_k \in F_k$ é válida a implicação

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots + \vec{f}_k = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \dots = \vec{f}_k = \vec{0}.$$

(equivale a dizer que o vector $\vec{0}$ se escreve de maneira única como soma de k vectores, pertencentes respectivamente a F_1, F_2, \dots, F_k).

(b) Sendo T um endomorfismo de um espaço vectorial E , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, k vectores próprios distintos de T e $E[\lambda_1], E[\lambda_2], \dots, E[\lambda_k]$ os respectivos subespaços próprios associados, prove que:

- i. $E[\lambda_1] + E[\lambda_2] + \dots + E[\lambda_k]$ é uma soma directa.
- ii. T é diagonalizável se e só se $E = E[\lambda_1] \oplus E[\lambda_2] \oplus \dots \oplus E[\lambda_k]$.

7 Soluções dos Exercícios Propostos

1. A :

| | | |
|--------------|----------------------------|---------------------------|
| λ | 0 | 2 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(1, -1, 1)\rangle$ | $\langle(1, 0, 1)\rangle$ |
| m.alg. | 1 | 2 |
| m. geom. | 1 | 1 |

; B :

| | | |
|--------------|----------------------------|--|
| λ | 1 | 2 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(1, -1, 1)\rangle$ | $\langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$ |
| m.alg. | 1 | 2 |
| m. geom. | 1 | 2 |

C :

| | | |
|--------------|-------------------------|------------------------|
| λ | 1 | 2 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(-1, 1)\rangle$ | $\langle(1, 0)\rangle$ |
| m.alg. | 1 | 1 |
| m. geom. | 1 | 1 |

; D :

| | | | |
|--------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| λ | -1 | 1 | 2 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(1, -2, 1)\rangle$ | $\langle(-1, 0, 1)\rangle$ | $\langle(1, 1, 1)\rangle$ |
| m.alg. | 1 | 1 | 1 |
| m. geom. | 1 | 1 | 1 |

E :

| | | | |
|--------------|--|--|---------------------------|
| λ | $3 + i\sqrt{2}$ | $3 - i\sqrt{2}$ | 2 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}i\sqrt{2}, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\sqrt{2}, 1)\rangle$ | $\langle(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}i\sqrt{2}, -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i\sqrt{2}, 1)\rangle$ | $\langle(1, 1, 1)\rangle$ |
| m.alg. | 1 | 1 | 1 |
| m. geom. | 1 | 1 | 1 |

F :

| | | | |
|--------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| λ | 2 | -2 | 1 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(0, 0, 0, 1)\rangle$ | $\langle(0, 0, 1, 0)\rangle$ | $\langle(1, 0, 0, 0)\rangle$ |
| m.alg. | 1 | 1 | 2 |
| m. geom. | 1 | 1 | 1 |

; G :

| | |
|--------------|---------------------------|
| λ | 1 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(0, 0, 1)\rangle$ |
| m.alg. | 3 |
| m. geom. | 1 |

2.

| Matriz | Diagonalizável ? | P | D |
|--------|------------------|---|---|
| A | Não | — | — |
| B | Sim | $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ |
| C | Sim | $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| D | Sim | $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| E | Sim | $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}i & \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}i & 1 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2}i & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 3 + \sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ |
| F | Não | — | — |
| G | Não | — | — |

3. T :

| | |
|--------------|----------------------------|
| λ | 2 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(-2, 1, 5)\rangle$ |

; S :

| | | |
|--------------|----------------------------|---------------------------|
| λ | 0 | 1 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(-1, 0, 1)\rangle$ | $\langle(0, 0, 1)\rangle$ |

$S \circ T$:

| | | | |
|--------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| λ | 0 | 1 | 4 |
| $E[\lambda]$ | $\langle(-4, 3, 5)\rangle$ | $\langle(0, 1, 0)\rangle$ | $\langle(0, 1, 3)\rangle$ |

4. $A_T(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Todas as matrizes que representam uma transformação linear relativamente a diferentes bases são semelhantes e, por isso, têm os mesmos valores próprios.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. (a) $p(\lambda) = \lambda^2 - (m+1)\lambda + m$, valores próprios $\lambda = m$ e $\lambda = 1$; (b) se $m \neq 1$, os valores próprios são distintos e existem 2 vectores próprios linearmente independentes. A matriz é, portanto, diagonalizável neste caso. Se $m = 1$, a matriz tem um único valor próprio ($\lambda = 1$) de multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1, pelo que não é diagonalizável.

8 (a) 2 e -3 com multiplicidades algébricas 1 e 2, respectivamente; (b) $p(\lambda) = (-1)^3(\lambda - 2)(\lambda + 3)^2 = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 18$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

9. $b = c$, $a + c = -2$, $\lambda_1 = c - 1$, $\lambda_2 = c + 3$ e $\lambda_3 = -2c - 1$.

10. (a) $a \neq 1$; (b) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

11. (a) Existe, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) Não existe; (c) $n = 4$.

12. (a) $p(\lambda) = \lambda^3 - 16\lambda + 2\lambda^2 - 32$; $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; (c)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. $\begin{bmatrix} 1 + \alpha + \beta & 1 - \alpha - \beta & 1 \\ 1 - \alpha & 1 + \alpha & 1 \\ 1 - \beta & 1 + \beta & 1 \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

14. $\begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Referências

- [1] Agudo, F. R. D., *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Livraria Escolar Editora, 1996.
- [2] Apostol, T., *Calculus*, Vol 2, Editorial Reverté, 1975.
- [3] Giraldez, E., Fernandes, V. H. e Smith, M. P. M., *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Editora McGraw-Hill de Portugal, 1995.
- [4] Luz, C., Matos, A. e Nunes, S., *Álgebra Linear (Volume I)*, 2ª edição, EST Setúbal, 2003.
- [5] Magalhães, L. T., *Álgebra Linear como Introdução a Matemática Aplicada*, Texto Editora, 1991.
- [6] Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York, 1980.