

Capítulo 3
Cálculo Integral em \mathbb{R}

Exercícios propostos

Cálculo Integral em \mathbb{R}

Exercício 1 Calcule as primitivas imediatas das seguintes funções:

1. $\frac{5x}{3\sqrt[3]{x^2+3}}$;
2. $\frac{x-3}{x^2+25}$;
3. $\frac{\arctan x}{1+x^2}$;
4. $\frac{1}{3} \cot(e^{3x}) e^{3x}$;
5. $(x + \sqrt[3]{x})^2$;
6. $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$;
7. $\cos \sqrt{1-e^x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$;
8. $x \tan^2(x^2 - 1) \sec^2(x^2 - 1)$;
9. $e^{2x^2 + \ln x}$;
10. $\frac{1}{x \ln x}$.

Exercício 2 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por partes:

1. $x^2 \ln x$;
2. $x^2 \sin x$;
3. $e^x \cos x$;
4. $\arctan x$;
5. $x \arctan x$.

Exercício 3 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por substituição:

1. $\sqrt{9-x^2}$;
2. $\frac{e^x - e^{3x}}{1+e^{2x}}$;
3. $\frac{x + \sqrt{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}$;
4. $\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}$.

Exercício 4 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por decomposição:

1. $\sin^3 x$;
2. $\frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}$;
3. $\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$;
4. $\frac{x^2}{1-x^4}$.

Exercício 5 Calcule as primitivas das seguintes funções:

1. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$;
2. $\frac{\sqrt{x-1}-\ln x}{(x-1)^2}$;
3. $e^x \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$;
4. $\sin^3 x \cos^5 x$;
5. $x \arcsin \frac{1}{x}$;
6. $\frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}$;
7. $x (\arctan x)^2$;
8. $\frac{3}{(2x+3)\sqrt{2-2\ln^2(2x+3)}}$.

Exercício 6 Determine a primitiva da função definida por $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, que toma o valor zero para $x = \pi^2$.

Exercício 7 Determine uma função $f(x)$ tal que, com $f'(1) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ se tem $f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$.

Exercício 8 Calcule os integrais:

1. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$;
2. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$;
3. $\int_1^3 |2 - x| dx$;

$$4. \int_0^2 f(x) dx \text{ com } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+3}{2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ;$$

$$5. \int_{-2}^0 \frac{x-1}{3x^2-6x+5} dx;$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x) dx;$$

$$7. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx;$$

$$8. \int_1^2 \frac{1}{x+5\sqrt{x+4}} dx.$$

Exercício 9

1. Utilize a fórmula de integração por substituição para mostrar que:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ se } f \text{ é par e } \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \text{ se } f \text{ é ímpar.}$$

2. Aplique a alínea anterior para calcular:

$$(a) \int_{-1}^1 |x| dx;$$

$$(b) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx;$$

$$(c) \int_{-2}^2 \frac{\sin x}{1+x^8} dx.$$

Exercício 10 Seja f uma função ímpar. Demonstre que a função h definida por $h(x) = \int_0^x f(t) dt$ é par.

Exercício 11 O integral $\int_a^b f(x) dx$ é transformado, pela mudança de variável $x = \sin t$ no integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{1+\cos t} dt$. Determine a , b e $f(x)$.

Exercício 12 Sem calcular os integrais, justifique que as seguintes desigualdades são válidas.

$$1. \int_0^1 \sqrt{x} dx \geq \int_0^1 x^3 dx;$$

$$2. e \leq \int_1^e e^{x^2} \ln x dx \leq e^{e^2}.$$

Exercício 13 Determine a expressão analítica da função $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, em que

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , 1 \leq x \leq 2 \\ (2-x)^2 & , 2 \leq x \leq 3 \end{cases} .$$

Exercício 14 Calcule a derivada da função

$$\phi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \cos t^2 dt, x \neq 0.$$

Exercício 15 Determine, sem calcular o integral,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}.$$

Exercício 16 Determine os extremos da função $\int_0^x t(1-t^2) dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 17 Calcule a área limitada pelas linhas:

1. $y = x^2$, $y = x + 6$, $y = 0$;
2. $y^2 + x^2 = 2x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = 0$;
3. $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$;
4. $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ ($p \in \mathbb{R}$).

Exercício 18 Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da região limitada pelas linhas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $x = \ln 2$.

Exercício 19 Determine o comprimento do arco da curva de equação $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ entre os pontos de coordenadas $(\frac{1}{4}, 1)$ e $(1 - \ln \sqrt{2}, 2)$.

Exercício 20 Determine:

1. a área da região plana limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x^2 = -8y$;
2. o volume do sólido obtido pela rotação da região referida em a) em torno:
 - (a) do eixo dos xx ;
 - (b) do eixo dos yy .

Exercício 21 Calcule os seguintes integrais impróprios:

1. $\int_1^\infty x e^{-x^2} dx$;
2. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;

3. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx;$
4. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{(x^2-4)^{\frac{6}{5}}} dx;$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$

Exercício 22 Estude a natureza dos seguintes integrais:

1. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx;$
2. $\int_1^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx;$
3. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+2x^2+3x^4} dx;$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$

Exercício 23 Determine a área da região infinita limitada pela curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, pela parábola $y = \frac{x^2}{2}$ e pelo eixo dos xx .

Exercícios Complementares

Exercício 24 Calcule as primitivas imediatas das seguintes funções:

1. $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9-x^2}};$
2. $\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}};$
3. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}};$
4. $\frac{1}{\cos^2 x(1+\tan x)}.$

Exercício 25 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por partes:

1. $\frac{x^2}{x^2+1} \arctan x;$
2. $3^x \sin 2x.$

Exercício 26 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por substituição:

1. $\frac{3x+4}{(x-5)^2+3}$;
2. $\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$;
3. $\frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$.

Exercício 27 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por decomposição:

1. $\tan^4 x$;
2. $\cos 2x \cos 3x$;
3. $\frac{x^4}{x^3+1}$.

Exercício 28 Calcule as primitivas das seguintes funções:

1. $x \sin x \cos x$;
2. $\frac{x^4+x-1}{x^2-x}$;
3. $\frac{e^x}{4+9e^{2x}}$;
4. $\frac{3e^x}{e^{2x}-2e^x-3}$.

Exercício 29 Considere a função $f(x) = \frac{3x^2+7}{(x^2+4)(x^2-1)}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Obtenha a primitiva de f que satisfaz as condições seguintes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$;
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
3. $F(0) = 1$.

Exercício 30 Considere a função $f''(x)$ definida por $f''(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$.

1. Determine a expressão geral das funções $f(x)$ que admitem $f''(x)$ como 2^a derivada .
2. Das funções da alinea anterior, determine aquela que verifica $f'(1) = f(1) = 0$.

Exercício 31 Determine a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \ln^2 x$ e $f(1) = 4$.

Exercício 32 Determine a primitiva da função $f(x) = x^2 e^x$, que toma o valor 1 para $x = 0$.

Exercício 33 Calcule os integrais:

1. $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx;$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx;$

3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx;$

4. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx;$

5. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(2-x^2)^3}} dx;$

6. $\int_0^1 \frac{1}{(4+2x)(1+x^2)} dx;$

7. $\int_9^{25} \frac{\sqrt{x}-3}{x(\sqrt{x}-2)} dx.$

Exercício 34 Prove que são iguais os integrais

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx.$$

Exercício 35 Demonstre que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$.

Exercício 36 Calcule a derivada, para $x > 0$, da função:

$$\phi(x) = \int_1^{x^3} \ln t dt.$$

Exercício 37 Sendo $f(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} e^{-t^2} dt$, determine o valor da constante k de modo que $f'(1) = 0$.

Exercício 38 Seja f uma função positiva e contínua em \mathbb{R} , e g a função definida por: $g(x) = \int_0^{\ln x} f(t) dt$.

1. Determine o domínio de g .
2. Calcule a derivada de g .
3. Estude a monotonia de g .

Exercício 39 Determine, sem calcular o integral,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

Exercício 40 Determine os extremos da função $\int_{\frac{1}{2}}^x t^2 \ln t dt$, $x \geq \frac{1}{2}$.

Exercício 41 Seja $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int_2^{x^2+x} \frac{\ln t}{\sqrt{t+2}} dt$. Prove que $\frac{2}{3}g'(1) = \ln 2$.

Exercício 42 Seja f uma função com derivada contínua em \mathbb{R} tal que para qualquer $x \geq 0$, $\int_0^{3x} f'(t) dt = x^4 + 3x^2$ e $f(0) = 2$. Determine a expressão analítica de f .

Exercício 43 Seja $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int_2^{x^3+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+1}} dt$. Prove que $\frac{1}{\sqrt{3}}g'(1) = \sin 2$.

Exercício 44 Calcule a área limitada pelas linhas:

1. $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo dos xx ;
2. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Exercício 45 Calcule o valor positivo de m , para que a área da região do primeiro quadrante limitada por $y = 2x^3$ e a recta $y = mx$ seja 32.

Exercício 46 Considere o segmento de curva $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

1. Determine a área limitada por este segmento de curva e o eixo dos xx .
2. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela região definida na alínea anterior numa rotação em torno do eixo dos xx .

Exercício 47 Determine o volume do toro gerado pela rotação da região limitada pela circunferência de equação $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ em torno do eixo dos yy .

Exercício 48 Seja A a região do plano definida por:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{1}{4} \wedge y \geq (x - 1)^2 \wedge y \leq \ln x \right\}.$$

1. Calcule a área de A .

2. Calcule o comprimento da linha dada pela equação $y = \ln(e^{x+\alpha})$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $-2 \leq x \leq 2$.

Exercício 49 Seja A a região do plano definida por:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x \wedge y \leq 0 \wedge y \geq (x+1)^2 - 4\}.$$

1. Calcule a área de A .
2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da parte de A que se encontra no 3º quadrante.

Exercício 50 Determine a área do subconjunto de \mathbb{R}^2 constituído pelos pontos que verificam as condições: $y \leq \frac{3}{x} \wedge y \leq x+2 \wedge y \geq 1$.

Exercício 51 Seja D a região do plano limitada pelas curvas de equações $y \geq x^2$, $y \leq -x+2$ e $y \leq 2$.

1. Calcule a área de D .
2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo dos xx .

Exercício 52 Calcule os seguintes integrais impróprios:

1. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$;
2. $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+8} dx$;
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} dx$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} dx$;
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Exercício 53 Calcule o seguinte integral impróprio $\int_0^2 \frac{a}{\sqrt{16-4x^2}} dx$, com $a \neq 0$, e indique a sua natureza.

Exercício 54 Estude a natureza dos seguintes integrais:

1. $\int_0^1 \frac{1+\sin^2 x}{x} dx$;
2. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$;

3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}$;

4. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}} dx$;

5. $\int_0^{+\infty} \frac{2x+6}{x^2+x+6} dx$;

6. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$;

7. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{x^3+1}} dx$.

Exercício 55 Prove que $\int_0^{\infty} \frac{2t+3}{4t^3+3} \sin t \, dt$ é absolutamente convergente.

Soluções

- 1.1:** $\frac{5}{4}(x^2 + 3)^{\frac{2}{3}} + C$; **1.2:** $\frac{1}{2} \log(x^2 + 25) - \frac{3}{5} \arctan \frac{x}{5} + C$;
1.3: $\frac{1}{2} \arctan^2 x + C$; **1.4:** $\frac{1}{9} \log |\sin e^{3x}| + C$; **1.5:** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$;
1.6: $\frac{1}{2} \log(1 + e^{2x}) + C$; **1.7:** $-2 \sin \sqrt{1 - e^x} + C$; **1.8:** $\frac{1}{6} \tan^3(x^2 - 1) + C$;
1.9: $\frac{1}{4}e^{2x^2} + C$; **1.10:** $\log |\log x| + C$.
2.1: $\frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + C$; **2.2:** $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$;
2.3: $\frac{1}{2}e^x (\cos x + \sin x) + C$; **2.4:** $x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + C$;
2.5: $\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + C$.
3.1: $\frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + C$; **3.2:** $-e^x + 2 \arctan e^x + C$;
3.3: $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 3 \log(1 + x^{\frac{1}{3}}) - 6 \arctan x^{\frac{1}{6}} + C$;
3.4: $-\frac{4}{\sqrt{x^2+2x-x}} - \log|1 - \sqrt{x^2+2x+x}| + C$.
4.1: $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$; **4.2:** $\frac{3}{5} \log|x - 2| + \frac{7}{5} \log|x + 3| + C$;
4.3: $x + \frac{1}{x} - \log|x| + 2 \log|x - 1| + C$;
4.4: $-\frac{1}{4} \log|1 - x| + \frac{1}{4} \log|x + 1| - \frac{1}{2} \arctan x + C$.
5.1: $\sqrt{x^2 - 9} - 3 \operatorname{arcsec} \frac{x}{3} + C$;
5.2: $-\frac{2}{\sqrt{x-1}} + \frac{\log x}{x-1} + \log|x| - \log|x - 1| + C$;
5.3: $e^x \log(e^{2x} - 4e^x + 3) - 2e^x - 3 \log|e^x - 3| - \log|e^x - 1| + C$;
5.4: $-\frac{1}{6} \cos^6 x + \frac{1}{8} \cos^8 x + C$; **5.5:** $\frac{1}{2}x^2 \arcsin \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} + C$;
5.6: $-\frac{1}{9}\sqrt{1 - 9x^2} - \frac{1}{9}(\arccos 3x)^3 + C$;
5.7: $\frac{1}{2}x^2 \arctan^2 x - x \arctan x + \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + \frac{1}{2} \arctan^2 x + C$;
5.8: $\frac{3\sqrt{2}}{4} \arcsin(\log(2x + 3)) + C$.
6: $F(x) = 2 \sin \sqrt{x}$.
7: $f(x) = \frac{4}{1+x} + 1$.
8.1: $\frac{7}{3}$; **8.2:** $\frac{100}{3}$; **8.3:** 1; **8.4:** $\frac{43}{12}$; **8.5:** $\frac{1}{6} \log \frac{5}{29}$; **8.6:** 1; **8.7:** $\log \frac{\sqrt{1+e^2+e}}{\sqrt{2+1}}$;
8.8: $\frac{2}{3} \log \frac{2}{\sqrt{2+1}} + \frac{8}{3} \log \frac{\sqrt{2+4}}{5}$.
9.1: Sugestão: Utilize a mudança de variável $x = -y$. **9.2a:** 1; **9.2b:** 0;
9.2c: 0.
10: Sugestão: Utilize a mudança de variável $t = -y$.
11: $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.
12.1: -; **12.2:** -;
13: $F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(2-x)^3 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$
14: $\phi'(x) = \cos x^2 + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2}$.
15: $\frac{1}{4}$.
16: $f(0)$ é mínimo e $f(-1)$ e $f(1)$ são máximos.

- 17.1:** $\frac{32}{3}$; **17.2:** $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$; **17.3:** $3 - e$; **17.4:** $\frac{4}{3}p^2$.
18: $\frac{9}{30}\pi$.
19: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\log 2$.
20.1: $\frac{8}{3}$; **20.2a:** $\frac{24}{5}\pi$; **20.2b:** $\frac{48}{5}\pi$.
21.1: $\frac{1}{2e}$; **21.2:** $6\sqrt[3]{2}$; **21.3:** $+\infty$; **21.4:** $-\frac{5}{2\sqrt[5]{5}}$. **21.5:** $+\infty$; **21.6:** $+\infty$.
22.1: divergente; **22.2:** convergente; **22.3:** convergente; **22.4:** absolutamente convergente.
23: $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}$.
24.1: $2\sqrt{3} + x + C$; **24.2:** $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$; **24.3:** $-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + C$;
24.4: $\log|1 + \tan x| + C$.
25.1: $x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$;
25.2: $\frac{1}{1+\frac{1}{4}\log^2 3} \left[-\frac{3^x}{2} \cos(2x) + \frac{\log^3 3}{4} 3^x \sin(2x) \right] + C$.
26.1: $\frac{3}{2}\log\left[\frac{(x-5)^2+3}{3}\right] + \frac{19\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-5}{\sqrt{3}}\right) + C$;
26.2: $\tan x + \frac{\tan x}{2(1+\tan^2 x)} - \frac{3}{2}x + C$; **26.3:** $\frac{3}{4}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}} + C$.
27.1: $x - \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$; **27.2:** $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$;
27.3: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{6}\log|x^2 - x + 1| + C$.
28.1: $-\frac{1}{4}x \cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x) + C$;
28.2: $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x| - \log|x-1| + C$; **28.3:** $\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3}{2}e^x\right) + C$;
28.4: $\frac{3}{4}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+1}\right| + C$.
29.1: $F(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{\pi}{4}$;
29.2: $F(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{\pi}{4}$;
29.3: $F(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1$.
30.1: $f(x) = -\frac{1}{2}x \cos(\log x) - \frac{1}{2}x \sin(\log x) + Cx + D$;
30.2: $f(x) = -\frac{1}{2}x \cos(\log x) - \frac{1}{2}x \sin(\log x) + x - \frac{1}{2}$.
31: $f(x) = x \log^2 x - 2x \log x + 2x + 2$.
32: $F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 1$.
33.1: $\frac{16}{3}$; **33.2:** 0 ; **33.3:** $\log \frac{3}{2}$; **33.4:** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2$; **33.5:** $\frac{1}{2}$;
33.6: $\frac{1}{10}\log \frac{3}{2} - \frac{1}{20}\log 2 + \frac{\pi}{20}$; **33.7:** $3\log \frac{5}{3} - \log 3$.
34: Sugestão: fazer a mudança de variável $x = \frac{\pi}{4} - t$.
35: Sugestão: fazer a mudança de variável $x = a + b - t$.
36: $\phi'(x) = 3x^2 \log x^3$.
37: $k = \frac{2}{e}$.
38.1: $D_g = \mathbb{R}^+$; **38.2:** $g'(x) = \frac{1}{x}f(\log x)$; **38.3:** Monótona crescente.
39: -1 .
40: $f(1)$ é mínimo.
41: $-$.
42: $f(x) = \frac{1}{81}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + 2$.
43: $-$.

44.1: 8; **44.2:** $\frac{1}{3}$.
45: $m = 16$.
46.1: $A = 2$; **46.2:** $V = \frac{\pi^2}{2}$.
47: $4\pi^2$.
48.1: $\frac{4}{3} - e^{\frac{1}{4}}$; **48.2:** $4\sqrt{2}$.
49.1: $2\sqrt{3} + \frac{5}{3}$; **49.2:** $\left(\frac{24\sqrt{3}}{5} + 9\right)\pi$.
50: $3\log 3$.
51.1: $\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{6}$; **51.2:** $\frac{32}{15}\pi$.
52.1: $+\infty$; **52.2:** $\frac{1}{2}\log 3$; **52.3:** $\log 2$; **52.4:** $+\infty$. **52.5:** $+\infty$.
53: $\frac{\pi}{4}a$, convergente.
54.1: divergente; **54.2:** convergente; **54.3:** divergente; **54.4:** convergente;
54.5: divergente; **54.6:** absolutamente convergente; **54.7:** absolutamente convergente.
55: -.