7 Testes de Hipóteses Paramétricos

Exercício 7.1 Para $X \sim \mathcal{N}(\mu; 100)$, $n = 25$, $\overline{x} = 1020$ e $\alpha = 0.05$, calcule a RC, erros de 2^a espécie e função potência (supondo $\mu = 1010$, 1030, 990 e 980) para:

1. $H_0 : \mu = 1000 \quad vs \quad H_1 : \mu > 1000.$
2. $H_0 : \mu = 1000 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 1000.$

Exercício 7.2 Um comerciante recebe ovos de um determinado aviário, onde os ovos são classificados consoante o peso, em duas classes A e B. O peso dos ovos de classe A tem distribuição $\mathcal{N}(50; 8)$ e o peso dos ovos de classe B tem distribuição $\mathcal{N}(55; 8)$. Um comerciante recebe uma remessa de ovos com garantia de serem de classe B e tem um prazo de dois dias para reclamar, caso considere ter havido engano da parte do aviário. Para tomar uma decisão ele analisou 10 ovos cujo peso total foi de 530 gramas.

1. Qual a atitude que o comerciante deve tomar (considere $\alpha = 0.05$)?
2. Determine o erro de 2^a espécie cometido.
3. Se pretender reduzir o erro de 2^a espécie a 20%, qual a dimensão da amostra a considerar?

Exercício 7.3 Uma firma tem seguido a política de oferecer uma garantia de 2000 utilizações para determinado aparelho que comercializa. Este procedimento baseia-se em estudos levados a cabo no período inicial de produção, que indicavam um número médio de utilizações possíveis por aparelho de 2060, com uma variabilidade traduzida por $\sigma = 20$. Existindo indícios de que presentemente a situação pode ter mudado, pretende-se averiguar se continua a ser 2060 o número médio de utilizações por aparelho. Para o efeito foram seleccionados ao acaso e testados pela firma 10 aparelhos, os quais forneceram os seguintes valores:

2100	2025	2071	2067	2150	2115	2064	2088	1995	2095

Suponha que o número de utilizações permitidas por aparelho comporta-se de forma aproximadamente normal.

1. Como define o teste de hipóteses a efectuar? Justifique.
2. Proceda ao cálculo da RC para o teste definido anteriormente (com $\alpha = 0.05$).

3. Face à amostra recolhida, que decisão tomaria quanto a H_0? Porquê?

Exercício 7.4 Um fabricante de cabos indicava que os seus cabos apresentavam uma tensão média de ruptura de 1800 toneladas, com um desvio padrão de 100 toneladas. Um outro fabricante dizia que tal valor não correspondia à verdade, indicando como média de ruptura de 1750 toneladas, com o mesmo desvio padrão. Para decidir qual dos dois dizia a verdade foi recolhida uma amostra de 35 cabos, verificando-se que apresentavam uma tensão média de ruptura de 1650 toneladas. Admita que a tensão de ruptura segue uma distribuição aproximadamente normal.

1. Realize o teste de hipóteses: $H_0 : \mu = 1800$ contra $H_1 : \mu = 1750$, e diga qual dos dois fabricantes terá razão (considere $\alpha = 0.05$).

2. Relativamente ao teste anterior determine o erro de 2^a espécie e a potência do teste.

3. Qual será a atitude mais correcta para diminuir os erros de 1^a e 2^a espécie? Justifique.

Exercício 7.5 Da produção diária de um dado fertilizante colheram-se nove amostras que se analisaram para calcular a percentagem média de azoto. Os resultados obtidos foram os seguintes:

$$6.2;\quad 5.7;\quad 5.8;\quad 5.8;\quad 6.1;\quad 5.9;\quad 6.0;\quad 5.7;\quad 5.9$$

Sabendo que o processo de análise utilizado fornece valores com distribuição Normal, $\mathcal{N}(\mu, 0.24)$:

1. Determine o menor nível de significância que assegura, com base nestas observações que a percentagem média de azoto no fertilizante é inferior a 6%.

2. Considerando um nível de significância de 0.05, calcule o erro de 2^a espécie e a função potência para uma percentagem média de azoto na composição do fertilizante de 5.6%. Comente a qualidade do teste efectuado.

Exercício 7.6 Para uma população com $\sigma = 10$ recolheu-se uma amostra de dimensão 49 e procedeu-se ao ensaio de $H_0 : \mu = 100$ contra $H_1 : \mu > 100$ com $\alpha = 0.05$. Indique o valor de μ_1 considerado ao obter-se para a função potência o valor $\pi(\mu_1) = 0.1075$.

Exercício 7.7 Comente a seguinte afirmação: "O valor da função potência de um teste de hipóteses é inversamente proporcional à qualidade do teste".

Exercício 7.8 Uma máquina antiga produz barras de aço com uma espessura de 0.05 m (metros). Com a finalidade de verificar se a máquina ainda está em boas condições, recolheu-se uma amostra de 40 barras, cuja espessura média é 0.053 m, com um desvio padrão de 0.003 m. Teste a hipótese de que a máquina ainda está em boas condições, usando um nível de significância de 0.05.

Exercício 7.9 A especificação de produção de determinada liga (com comportamento normal) exige 23.2% de cobre. Uma amostra de 10 análises da liga acusou um conteúdo médio de 23.5% de cobre com um desvio padrão de 0.24%.

1. Pode-se concluir que o produto satisfaz as especificações ($\alpha = 0.01$)?

2. Teste a hipótese de que o conteúdo médio de cobre seja superior ao exigido pelas especificações ($\alpha = 0.01$).

Exercício 7.10 Seja X uma v.a. com distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ. A partir de uma amostra de dimensão 30 dessa variável obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 64 \qquad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2 = 84.8$$

1. Teste ao nível de significância de 5% a hipótese da média ser superior a 2.

2. Construa um intervalo de confiança para a variância a 90%.

3. Indique qual a dimensão da amostra que teria de considerar para obter um valor aproximado para a média com amplitude inferior a 1 e com um grau de confiança de 95%.

Exercício 7.11 Pretende-se saber a quantidade de nicotina (medida em miligramas) existente numa determinada marca de cigarros. Examinaram-se 5 cigarros dessa marca, tendo-se obtido os seguintes resultados:

$$16; \quad 16.5; \quad 19; \quad 15.4; \quad 15.6;$$

Sabendo que a variável segue uma distribuição normal:

1. Teste ao nível de significância de 0.1 a hipótese: $H_0 : \mu = 13.5$ contra $H_1 : \mu \neq 13.5$.

2. Determine um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão da quantidade de nicotina existente em cada cigarro.

3. Teste a hipótese da quantidade média de nicotina ser de 14 mg contra a hipótese alternativa de ser de 13.5 mg e indique o valor da respectiva função potência (utilize $\alpha = 0.05$).

4. Numa amostra de 100 fumadores, 20 contraíram cancro do pulmão. Será que a percentagem de fumadores que contraem cancro é superior a 18%? Justifique a sua resposta utilizando um teste de hipóteses adequado, com um nível de significância 0.05.

Exercício 7.12 O anúncio de uma certa dieta de emagrecimento dizia: "Perca 18 quilos em 4 meses!". Recolheu-se uma amostra de 30 seguidores desta dieta tendo-se obtido uma média de 14.4 e um desvio padrão de 4.4 (em quilos perdidos).

1. Obtenha um intervalo de 95% de confiança para o número médio de quilos perdidos com esta dieta.

2. Teste, a um nível de significância de 5%, $H_0 : \mu = 18$ versus $H_1 : \mu = 15$ e interprete o resultado.

3. Relativamente à alínea anterior, calcule as probabilidades dos erros de 1^a, 2^a espécie e função potência.

4. Supondo que o verdadeiro valor do desvio padrão é 5, qual deveria ser a dimensão da amostra para situar o valor médio num intervalo de confiança de amplitude 4, com 99% de confiança?

Exercício 7.13 Uma fábrica de adubos tem um novo adubo que diz produzir uma média de 2 ton/ha de um determinado cereal. Para efectuar um teste bilateral com hipótese nula $H_0 : \mu = 2$, é extraída uma amostra aleatória de 16 ha, com uma variância de 0.095 ton^2, recolhida de uma área agrícola experimental. Considerando que a produção do cereal pode ser representada por uma v.a. X normalmente distribuída e que se $1.8 < \overline{x} < 2.2$, não se rejeita H_0

1. Determine o nível de significância do teste.

2. Determine o valor da função potência para uma produção média de 1.6 ton/ha.

Exercício 7.14 Uma exploração agrícola pretende testar o efeito de um novo estrume natural sobre a produção de batata. Para tal, escolheram-se 24 hectares de terra; metade dessa área foi tratada com o novo estrume, e a outra metade sem ele. As restantes condições são idênticas e a produção tem comportamento normal. A colheita média por hectare tratado com o estrume foi 5.1 t (toneladas) de batatas com um desvio padrão de 0.36 t. A safra média por hectare restante foi 4.8 t com um desvio padrão de 0.4 t. Podemos concluir que há melhoria significativa na produção média de batata devido ao emprego do novo estrume natural (utilize $\alpha = 0.05$)?

Exercício 7.15 A dona de uma boutique pode escolher entre dois fornecedores para a aquisição de calças para senhora. Aparentemente, a única diferença reside no preço. A dona da boutique comprará pois ao 1^o fornecedor (que tem preços mais baixos) a não ser que haja razões para crer que o produto é de qualidade inferior (tenha, em média, menor resistência). Recolhidas duas amostras, obtiveram-se os seguintes resultados:

	Fornecedor 1	Fornecedor 2
n	12	9
$\bar{x}$	88	92
s^2	9	11

1. Admitindo que a característica em estudo (resistência média) segue distribuição normal (com variâncias iguais), diga, justificando, que decisão deve tomar a dona da boutique (considere $\alpha = 0.05$).

2. Comente quais as consequências para o teste anterior de ser utilizado um grau de significância de 0.01.

3. Suponha que conhece as variâncias das populações, sendo $\sigma_1^2 = 8$ e $\sigma_2^2 = 9$. Elabore novamente um teste de hipóteses, indicando que decisão deve tomar a dona da boutique (considere $\alpha = 0.05$).

Exercício 7.16 Num exame de estatística, 12 estudantes da turma A tiveram nota média de 78% com desvio padrão de 6%, enquanto que 15 estudantes da turma B tiveram nota média de 74% com desvio padrão de 8%. Ao nível de significância de 0.05, verifique se a turma A é superior à turma B (considere as populações normais com variâncias iguais).

Exercício 7.17 Uma clínica pretende comparar dois tipos de dietas. Com esse objectivo, escolheu aleatoriamente e independentemente, uma amostra de 100 pacientes com excesso de peso e durante 10 semanas metade desses pacientes foram sujeitos à dieta 1 e os restantes à dieta 2. Após as 10 semanas, anotou-se o total de peso perdido (em kg) por cada paciente e obteve-se $\overline{x}_1 = 9.3$ quilos e $s_1 = 2.4$ quilos para a dieta 1 e $\overline{x}_2 = 8.2$ quilos e $s_2 = 2.6$ quilos para a dieta 2.

1. Deve-se admitir que as duas dietas têm, em média, o mesmo efeito na perda de peso? Justifique a resposta considerando $\alpha = 0.05$.

2. Suponha que a dieta 1 provoca, em média, uma perda de peso de mais 2 quilos do que a dieta 2. Determine a potência do teste anterior.

Exercício 7.18 Após longos estudos, concluiu-se que o tempo (em segundos) de reacção dos condutores a obstáculos na estrada, pode ser descrito por uma variável aleatória com distribuição normal de média 0.95 *seg*. Num circuito com diversos obstáculos foram feitos testes a 100 condutores, verificando-se $\sum_{i=1}^{100} (x_i - 0.95)^2 = 50\ seg^2$.

1. Teste, ao nível de significância de 1%, se o desvio padrão do tempo de reacção é no máximo 1 segundo.

2. Calcule a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula testada na alínea anterior, sabendo que o verdadeiro valor do desvio padrão do tempo de reacção é 1.07 segundos. Comente o resultado obtido.

Exercício 7.19 Obtem-se a temperatura anual de uma cidade, determinando a média das temperaturas médias no 15^o dia de cada mês. O desvio padrão das temperaturas anuais da cidade, num período de 100 anos é $16^o\ F$, tendo as mesmas um comportamento normal. Sabendo que nos últimos 15 anos o desvio padrão calculado foi de $10^o\ F$, teste a hipótese de que as temperaturas na cidade se tornaram menos variáveis do que no passado, utilizando:

1. $\alpha = 0.05$.

2. $\alpha = 0.01$.

Exercício 7.20 No exame de Probabilidades e Estatística efectuado na 2^a época do ano lectivo de 1999/2000 numa Escola Superior, foram avaliados 31 alunos. Considerando estes alunos como uma amostra representativa da população dos alunos matriculados na cadeira de Probabilidades e Estatística e tendo em conta que as notas seguem um comportamento normal e que, para essa amostra, se obtiveram os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{31} x_i = 299 \qquad \sum_{i=1}^{31} (x_i - \overline{x})^2 = 120$$

1. Teste a hipótese $\sigma^2 = 5$ contra a hipótese $\sigma^2 > 5$ para um $\alpha = 0.05$.

2. Suponha que o verdadeiro valor da variância é 6.29, calcule o erro de 2^a espécie e a respectiva função potência.

Exercício 7.21 O dono de uma ervanária produz um chá relativamente ao qual afirma que é eficaz em mais de 90% dos casos para curar dores de cabeça. Num inquérito feito a 250 cliente dessa ervanária, 198 concordaram que o chá curava as dores de cabeça. Verifique através de um teste de hipóteses (com $\alpha = 0.05$) se o resultado do inquérito é compatível com a pretensão do fabricante do chá?

Exercício 7.22 O director de recursos humanos de uma grande empresa ouviu o seu adjunto garantir que mais de 40% dos empregados, durante os 10 últimos anos, haviam estado de baixa por períodos superiores a 5 dias. Após refletir sobre o assunto, decidiu encomendar um estudo para confirmar ou desmentir a afirmação do seu adjunto. Uma amostra de 230 elementos dos quadros da empresa foi extraída aleatoriamente de entre a população que já tinha estado de baixa, tendo revelado que 100 tinham ultrapassado 5 dias. Para $\alpha = 0.05$, verifique se o adjunto tinha ou não razão.

Exercício 7.23 Estima-se que 25% dos automóveis que circulam em Portugal não satisfazem os níveis mínimos de segurança. A Direcção Geral de Viação lançou uma campanha com o objectivo de motivar os automobilistas a fazer revisões regulares nos seus automóveis. No fim da campanha foram seleccionadas aleatoriamente 40 viaturas e verificou-se que 8 delas não satisfaziam os níveis mínimos de segurança.

1. Teste ao nível de significância de 10% a hipótese de que a campanha tenha surtido efeito.

2. Se numa operação STOP na estrada nacional número 10, em 600 carros, 114 revelarem deficiências graves, construa um intervalo de confiança (a 90% de confiança) para a verdadeira percentagem de carros com deficiências graves circulando nessa estrada.

Exercício 7.24 Ao testar as hipóteses $H_0 : p \geq 0.7$ contra $H_1 : p < 0.7$ com $\alpha = 0.05$ obteve-se $\pi(p = 0.65) = 0.2206$. Qual a dimensão da amostra considerada?

Exercício 7.25 A tabela seguinte contém os resultados de um inquérito realizado junto de pessoas de ambos os sexos, acerca da opinião sobre a proibição de fumar nos locais de trabalho:

	deve ser proibido	não deve ser proibido
n^o de homens	50	50
n^o de mulheres	60	40

1. Um jornal afirma que a percentagem de mulheres a favor desta proibição se situa acima dos 65%. Verifique a veracidade desta afirmação elaborando um teste de hipóteses adequado (com $\alpha = 0.025$).

2. Calcule para o teste anterior,

   (a) o erro de 1^a espécie associado ao teste;

   (b) o erro de 2^a espécie cometido se $p = 0.75$.

3. Teste a hipótese da percentagem de pessoas favoráveis à não proibição ser igual para ambos os sexos (com $\alpha = 0.05$).

Exercício 7.26 Um estudo nutricional detectou numa amostra de 55 hipertensos, 24 com dietas pobres em sódio. Paralelamente, numa amostra de 149 não hipertensos detectaram-se 36 com dietas pobres em sódio. Poderá concluir-se, para um nível de significância de 0.05, que a proporção de indivíduos sujeitos a dietas pobres em sódio é maior entre hipertensos?

Exercício 7.27 Uma ruptura na coligação que o elegeu levou o Presidente da Câmara Municipal de Vila do Rio a demitir-se e à consequente marcação de eleições intercalares. O Presidente da Câmara demissionário, uma figura muito popular na região, decidiu recandidatar-se ao cargo. Uma rádio local pretende anunciar logo após o fecho das urnas se o presidente demissionário foi ou não reeleito. Para isso decidiu realizar uma sondagem à boca das urnas (isto é, as intenções de voto serão recolhidas logo após os eleitores terem votado) entrevistando 500 eleitores da margem sul do rio seleccionados aleatoriamente, tendo obtido que 220 eleitores votaram no presidente demissionário. Uma rádio local concorrente também realizou uma sondagem à boca das urnas, tendo entrevistado 300 eleitores da margem norte, tendo registado que 154 votaram no presidente demissionário. A selecção dos eleitores nesta segunda sondagem também foi aleatória e as duas sondagens foram realizadas de forma independente. Verifique ao nível de significância de $0,05$ se as duas sondagens são ou não contraditórias.

Exercício 7.28 Duas amostras (extraídas de duas populações normais) consistindo em 21 e 9 observações, têm variâncias $s_1^2 = 16$ e $s_2^2 = 8$ respectivamente.

1. Para $\alpha = 0.05$, teste a hipótese da variância da 1^a população ser superior à da 2^a população.

2. Resolva a questão anterior para o caso das amostras terem 61 e 121 observações respectivamente.

Exercício 7.29 As variâncias modificadas de duas amostras aleatórias independentes extraídas de duas populações normais foram $s_1^2 = 6.32$ e $s_2^2 = 2.34$, sendo as amostras de dimensões $n_1 = 11$ e $n_2 = 16$ respectivamente. Comente à luz destes dados a hipótese das duas populações terem a mesma variância ($\alpha = 0.05$).

Exercício 7.30 Suponha que as produções (em gramas) de comprimidos, em intervalos de tempo fixos, aleatóriamente seleccionados de duas máquinas $M1$ e $M2$ de um laboratório se podem considerar normais (com variâncias iguais). Os pesos obtidos em duas amostras permitiram determinar as quantidades seguintes:

M1	**M2**
$\sum_{i=1}^{8} x_i = 80.8$	$\sum_{j=1}^{9} y_j = 96.3$
$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 816.664$	$\sum_{j=1}^{9} (y_j - \bar{y})^2 = 0.549$

1. Verifique se é plausível considerar que a variabilidade, em gramas, da produção das duas máquinas é idêntica ($\alpha = 0.01$).

2. O técnico responsável pelas duas máquinas garante que a máquina 2 produz, em média, mais quantidade que a máquina 1. Ao nível de 5%, esta afirmação é consistente com os dados?

Soluções

7.1.1: $RC = [1032.9, +\infty[$;
$\mu = 1010 : \beta = 0.8749,\ \pi = 0.1251$;
$\mu = 1030 : \beta = 0.5596,\ \pi = 0.4404$.
7.1.2: $RC =]-\infty, 960.8] \cup [1039.2, +\infty[$;
$\mu = 980 : \beta = 0.83,\ \pi = 0.17$;
$\mu = 990 : \beta = 0.921,\ \pi = 0.079$;
$\mu = 1010 : \beta = 0.921,\ \pi = 0.079$;
$\mu = 1030 : \beta = 0.6769,\ \pi = 0.3231$.
7.2.1: Não rejeitar $H_0 : \mu = 55$. **7.2.2:** 0.3707. **7.2.3:** $n \approx 64$.
7.3.1: $H_0 : \mu = 2060$ contra $H_1 : \mu \neq 2060$.
7.3.2: $]-\infty, 2047.6039] \cup [2072.3961, +\infty[$. **7.3.3:** Rejeita-se H_0.
7.4.1: Rejeita-se H_0. **7.4.2:** $\beta = 0.0951$; $\pi = 0.9049$. **7.4.3:** $-$.
7.5.1: $\alpha \geq 0.1056$. **7.5.2:** $\beta = 0.0004$; $\pi = 0.9996$.
7.6: $\mu_1 = 100.5786$.
7.7: $-$.
7.8: Rejeitar $H_0 : \mu = 0.05$.
7.9.1: .Rejeitar $H_0 : \mu = 23,2$. **7.9.2:** Rejeitar $H_0 : \mu = 23,2$.
7.10.1: Não rejeitar $H_0 : \mu \leq 2$. **7.10.2:** $]1.9906, 4.7909[$. **7.10.3:** $n \geq 45$.
7.11.1: Rejeitar H_0. **7.11.2:** $]0.8761, 4.1956[$. **7.11.3:** Não rejeitar H_0;
$\pi \approx 0.1$. **7.11.4:** Não rejeitar $H_0 : p \leq 0.18$.
7.12.1: $]12.8255, 15.9745[$. **7.12.2:** Rejeitar H_0. **7.12.3:** $\alpha = 0.05$;
$\beta = 0.0183$; $\pi = 0.9817$. **7.12.4:** $n = 42$**.**
7.13.1: $\alpha = 0.02$. **7.13.2:** $\pi = 0.99$.
7.14: Rejeitar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$.
7.15.1: Rejeitar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$. **7.15.2:** $-$.
7.15.3: Rejeitar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$.
7.16: Não rejeitar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$.
7.17.1: Rejeitar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$. **7.17.2:** $\pi = 0.9793$.
7.18.1: Não rejeitar $H_0 : \sigma^2 \leq 1$. **7.18.2:** $\beta = 0.90$, má qualidade.
7.19.1: Rejeitar $H_0 : \sigma^2 = 256$. **7.19.2:** Não rejeitar $H_0 : \sigma^2 = 256$.
7.20.1: Não rejeitar H_0. **7.20.2:** $\beta = 0.75$; $\pi = 0.25$.
7.21: Não rejeitar $H_0 : p \leq 0.9$.
7.22: Não rejeitar $H_0 : p \leq 0.4$.
7.23.1: Não rejeitar $H_0 : p = 0.25$. **7.23.2:** $]0.1637, 0.2163[$.
7.24: $n = 60$.
7.25.1: Não rejeitar $H_0 : p_2 \leq 0.65$. **7.25.2.2a:** $\alpha = 0.025$.
7.25.2.2b: $\beta = 0.4404$. **7.25.3:** Não rejeitar $H_0 : q_1 - q_2 = 0$.
7.26: Rejeitar $H_0 : p_1 - p_2 = 0$.
7.27: Rejeitar $H_0 : p_1 - p_2 \leq 0$.

7.28.1: Não rejeitar $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$. **7.28.2:** Rejeitar $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$.
7.29: Não rejeitar $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$.
7.30.1: Não rejeitar $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$. **7.30.2:** Rejeitar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$.